للعينة كلما كان الفرق أقل مابين متوسط العينة ومتوسط المجتمع . إن الخطأ القياسي يعطى بالعلاقة التالية :

$$S_{\bar{X}} = S / \sqrt{N}$$

حيث أن : SX` : الخطأ القياسي

S الانحراف المعياري

N عدد عناصر العينة

◄ من الجدير بالذكر انه يمكن استخدام الخطأ القياسي لتحديد المجال الذي يقع ضمنه متوسط المجتمع حيث أن متوسط المجتمع يقع بشكل عام ضمن المجال :

$$\bar{X} \pm S_{\bar{X}} * t$$

ويطلق على هذا المجال كما هو معروف في الإحصاء مجال الثقة.

========== **نهاية المحاضرة الثالثة الرابعة** =========

نظرية الاحتمالات والتوزيعات

THIORY OF PROBABILITY AND DISTRIBUTIONS

5-1- **مقدمة**: يرتبط الإحصاء والاحتمال ارتباطا وثيقا،فالاحتمال هو الأداة التي تمكن الإحصائي من استخدام المعلومات في عينة للقيام باستقراءات حول المجتمع الذي أخذت منه.

من اجل دراسة احتمال ظاهرة طبيعية أو حادثة معينة يتم من خلال مراقبة وقوع الحادثة وتسجيل تكرار وقوعها خلال فترة محددة.ثم نحسب احتمال الظاهرة من خلال تكرار التجربة أو المراقبة عددا كبيرا من المرات N ،مثلا، وكان عدد مرات وقوع الحادثة A هو n مرة فيكون بذلك احتمال الحادثة A هو كما يلي:

$$P(A) = n / N$$

ولوضع نموذج مخصص يعبر عن قيمة احتمال الحادثة A يجب الأخذ بعين الاعتبار مراعاة الشرطين التاليين :

$$0 <= P(A) <= 1$$

$$\Sigma P (A) = 1$$

تختلف الظواهر والحوادث من حيث درجة حدوثها أو وقوعها ومدى تكرار ذلك خلال فترات معينة ،وهذا ما يطلق عليه احتمال الظاهرة أو الحدث .بناء على ذلك يمكن أن نصنف الظواهر والحوادث بشكل عام إلى المجموعات التالية:

- حوادث مؤكدة : درجة احتمالها % 100
- حوادث مستحيلة : درجة احتمالها % 0.0
- حوادث محتملة أو متوقعة درجة احتمالها أكبر من % 0.0 وأصغر من % 100

لنتذكر أن التجربة هي كل عملية تؤدي إلى قياس أو ملاحظة .وتنتج معظم التجارب ذات الأهمية قياسات عددية تتغير من عينة إلى أخرى وبالتالي يدعى هذا القياس بالمتحول العشوائي.وهذا يقودنا إلى الفقرة التالية.

5- 2- أنواع المتغيرات variables: يمكن تقسيم المتغيرات إلى نوعين وذلك حسب القيم التي يأخذها المتغير :

- متغير كمي QUALITIVE:هو المتغير الذي يأخذ قيم كمية أي قابلة للقياس كميا كوحدات القياس مثل وحدات الوزن،الطول ،الحجم ...إلى آخره. وكمثال على ذلك المبيد ،السماد،العمر،كمية الغذاء وهكذا...
- متغير نوعي QUANTITIVE: هو المتغير الذي يأخذ قيم نوعية غير قابلة للقياس كميا بوحدات القياس المذكورة آنفا بل يقاس بوحدات القياس النوعي كالدرجات والتدرجات والمستويات وهكذا ... إلى آخره.وكمثال على ذلك اللون ودرجة النجاح ودرجة المقاومة ...

- مصادر المتغيرات variables: يمكن تقسيم المتغيرات إلى نوعين وذلك حسب نوع التحكم أو المصدر إلى نوعين :
  1. متغير عشوائي أو احتمالي RANDOM variables: هو المتغير الذي يأخذ قيم عشوائية محتملة لا يمكن التحكم بها مسبقا مثل المتغيرات الجوية كالحرارة والرطوبة وغيرها .
  2. متغير غير احتمالي Controlled variable: المتغير الذي يأخذ قيم محددة يمكن التحكم بها مسبقا مثل المبيد ،السماد،العمر،كمية الغذاء وهكذا...

5-3-التوزيع الاحتمالي للمتحولات :ان الظواهر الطبيعية والتي تهمنا من الناحية الزراعية يمكن تمثيل قيمها كمجال لمتغير عشوائي.

بالتالي فإن المتغير العشوائي يمثل تابع عددي معرف على عينة القياسات أو القيم.وبما أن لكل قيمة أو قياس في العينة احتمالا معينا فانه يمكن القول أن التوزيع لمتحول عشوائي هو علاقة أو جدول أو خط بياني يقدم الاحتمال الموافق لكل قيمة من قيم المتحول العشوائي.

من هنا تستوضح لنا أهمية دراسة التوزيعات الاحتمالية المعروفة والتي لها تطبيقات عملية في مجال الزراعة.

إذن من خلال هذا الفصل سنقدم شرحا مفصلا لموضوع التوزيعات الاحتمالية كما يلي:

5-4- التوزيع الثنائي :يعتبر التوزيع الثنائي من التوزيعات الرياضية المعروفة والمهمة من الناحية التطبيقية .

5-4-1- تعريف : ليكن لدينا E تجربة ما وليكن A حدث مرتبط بهذه التجربة ولنرمز لـ n لعدد مرات تكرار التجربة و X عدد مرات ظهور أو وقوع الحدث A ،عندئذ فان احتمال ظهور الحدث A عدد من المرات مساو لـ r هو التالي:

$$P(x=r) = (r^n) * P^r * q^{n-r}$$

حيث أن : P هو احتمال ظهور أو وقوع الحدث A

q احتمال عدم ظهور أو وقوع الحدث A

run هي توافيق كل منهما وهي تحسب كما يلي:

$$(\overset{n}{r}) = n\ !/(n\text{-}r!)*r!$$

حيث أن : n عدد مرات تكرار

r عدد مرات احتمال ظهور الحدث A

ويحسب التوقع الرياضي للتوزيع الثنائي من العلاقة التالية :

$$M(x) = n * p$$

كما يحسب التباين

$$\sigma^2 (x) = n * p * q$$

كما يحسب الانحراف المعياري للتوزيع الثنائي من العلاقة التالية :

$$\delta(x) = \sqrt{n * p * q}$$

مثـــــال (1) :تم رش 100 شجرة برتقال في أحد البساتين لمعالجة أحد الأمراض علما أن فعالية المبيد النظرية هي 90% .والمطلوب هو حساب ما يلي :

1. اخترنا أحد الأشجار بعد الرش ،فما هو احتمال أن تكون هذه مصابة؟
2. ما هو احتمال أن تكون ثلاث أشجار مصابة؟
3. ما هو احتمال أن لا تكون ولا شجرة مصابة؟
4. ما هو احتمال أن يوجد شجرة مصابة على الأقل؟
5. ما هو أن يوجد شجرتين مصابتين على الأكثر؟

الحـــــل : لدينا مسبقا الافتراضات التالية:

P = 1- q

n = 100

$$P(x = r) = (r^n) * P^r * q^{n-r}$$

$$(^n_r) = n\ !/(n\text{-}r!)*r!$$

الآن نطبق العلاقات المذكورة مع مراعاة القيم المسبقة لكل متغير :

1. احتمال أن تكون هذه الشجرة مصابة:

P = 1- q

P = 0.1

q = 0.9

r = 1

n = 100

$P(x=1) = (_1^{100})*(0.1)^1*(0.90)^{99}$

$P(x=1) = 100*0.1*2.95*10^{-5}$

P(x=1) = 0.000295

2. احتمال أن تكون ثلاث أشجار مصابة:

P = 1- q

P = 0.1

q = 0.9

r = 3

$P(x=3) = (_3^{100})*(0.1)^3*(0.90)^{79}$

$$P(x=3) = 161700 * 0.001 * 3.63 * 10^{-5}$$

$$P(x=3) = 0.0059$$

3. احتمال أن لا تكون ولا شجرة مصابة:

$$P = 1 - q$$

$$P = 0.1$$

$$q = 0.9$$

$$r = 0$$

$$P(x=0) = ({}_0{}^{100}) * (0.1)^0 * (0.90)^{100}$$

$$P(x=0) = 1 * 1 * 2.65 * 10^{-5}$$

$$P(x=0) = 0.0000265$$

4. احتمال أن يوجد شجرة مصابة على الأقل:

$$P(x>=1) = 1 - p(x<1) = 1 - p(x=0)$$

$$P(x>=1) = 1 - 0.0000265$$

$$P(x>=1) = 0.99997$$

5. أن يوجد شجرتين مصابتين على الأكثر :

$$P(x<=2) = p(x=2) + p(x=1) + p(x=0)$$

$$P(x=2) = ({}_2{}^{100}) * (0.1)^2 * (0.90)^{89}$$

$$P(x=2) = 0.001485$$

$$P(x=1) = 0.000295$$

$$P(x=0) = 0.0000265$$

$$P(x<=2) = 0.001541$$

أما التوقع الرياضي لعدد الأشجار المصابة بعد الرش يمكن ان نحسبه كما يلي:

$$M(x) = n^* p = 100 * 0.1 = 10$$

أي من المتوقع بقاء عشرة أشجار مصابة بعد الرش.

5-5- **توزيع بواسون** : نقول عن متحول عشوائي x أن توزيعه الاحتمالي يتبع توزيع بواسون إذا كان تابع التوزيع الاحتمالي له على الشكل التالي :

$$p(x = r) = (\lambda^r * e^{-\lambda}) / r \ !$$

حيث أن : λ الوسيط وهي تحسب من العلاقة التالية:

$$\lambda = n * p$$

ويحسب التوقع الرياضي لتوزيع بواسون من العلاقة التالية :

$$M(x) = \lambda$$

كما يحسب التباين لتوزيع بواسون من العلاقة التالية :

$$\sigma^2 (x) = \lambda$$

كما يحسب الانحراف المعياري لتوزيع بواسون من العلاقة التالية:

$$\delta^2 = \sqrt{\lambda}$$

تجدر الإشارة هنا إلى أنه يجب أن تتوفر الشروط التالية استخدام توزيع بواسون :

$$n > 50 \quad \text{و} \quad n^* p < 5$$

مثـــــــال :تم تجريب لقاح مضاد لأحد الأمراض على 2000 حيوان تجربة من حيوانات الأرانب مع العلم أن نسبة الضرر من اللقاح هي 0.2% والمطلوب :

1. ما هو التوقع الرياضي لعدد الأرانب المصابة بعد اللقاح؟
2. ،فما هو احتمال أن يكون أرنب واحد متضرر؟
3. ما هو احتمال أن لا يكون ولا أرنب واحد متضرر ؟
4. ما هو احتمال أن تكون ثلاث أرانب متضررة على الأقل؟

الحـــــــل : لدينا المعطيات الأولية التالية :

$$n = 2000 \quad (>50)$$

$$n * p = 4 \quad (<5)$$

إذا أمعنا النظر في المعطيات الأولية نلاحظ أنه تتوفر الشروط اللازمة لاستخدام توزيع بواسون .

1. التوقع الرياضي لعدد الأرانب المصابة بعد اللقاح هو :

$$M(x) = \lambda = n * p$$

$$M(x) = 2000 * 0.002$$

$$M(x) = 4$$

2. احتمال أن يكون أرنب واحد متضرر:

$$p(x = r) = (\lambda^r * e^{-\lambda}) / r !$$

$$\lambda = n * p = 4$$

$$r = 1$$

$$P(x=1) = 0.07$$

3. احتمال أن لا يكون ولا أرنب واحد متضرر :

$$p(x = r) = (\lambda^r * e^{-\lambda}) / r !$$

$$\lambda = n * p = 4$$

$$r = 0$$

$$P(x=1) = 0.07$$

4. احتمال أن تكون ثلاث أرانب متضررة على الأقل:

$$p(x = r) = (\lambda^r * e^{-\lambda}) / r !$$

$$\lambda = n * p = 4$$

r >= 3

P(x>=3) = P(x=3) + P(x=4) +... P(x=n)

P(x>=3) = 1- P(x<3)

P(x>=3) = 1- [P(x=2) + P(x=2) + P(x=0)]

P(x>=3) = 1- (0.15+0.07+0.02)

P(x>=3) = 0.76

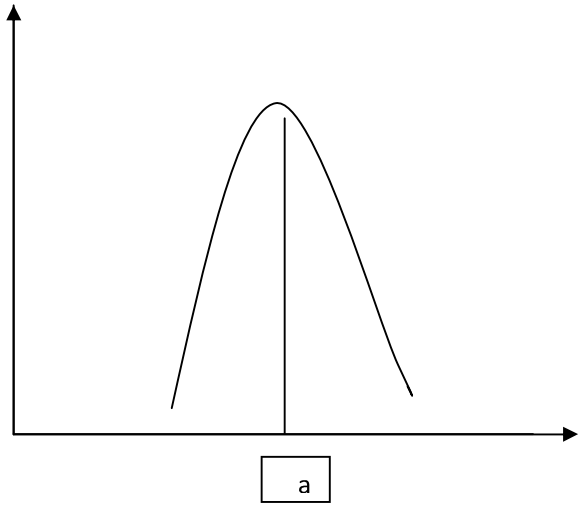
5-6- التوزيع الطبيعي :

5-6-1- تعريف : نقول عن متحول عشوائي x أن توزيعه الاحتمالي يتبع التوزيع الطبيعي إذا كان تابع التوزيع الاحتمالي له على الشكل التالي :

$$f(x) = (1 * e^{-(x-a)/2\delta^2}) / \delta * \sqrt{2\pi}$$

يعتبر التوزيع الطبيعي من التوزيعات الرياضية المعروفة والمهمة من الناحية التطبيقية .

5-6-2- منحنى التوزيع الطبيعي :يملك منحنى التوزيع الطبيعي شكلا ناقوسيا يشبه شكل الجرس على الشكل التالي :



ويمثل هذا الشكل السلوك الطبيعي للظواهر الطبيعية .حيث تبدأ من نقطة منخفضة ثم تزداد حتى تصل إلى الذروة ثم تعود وتنخفض إلى نفس المستوى السابق ،وهذا ما يطلق عليه قانون تناقص الغلة في الاقتصاد(كما ورد في كتاب الاقتصاد الزراعي في السنة الاولى).

ويحسب التوقع الرياضي للتوزيع الطبيعي من العلاقة التالية :

$$M(x) = a$$

كما يحسب التباين للتوزيع الطبيعي من العلاقة التالية :

$$\sigma^2 (x) = \sigma^2$$

كما يحسب الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي من العلاقة التالية:

$$\sigma (x) = \sigma$$

ملاحظات هامة :

- ان المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحور الأفقي (x) يساوي الواحد كما هو متعارف عليه.
- ان إحداثيات التالية:

$$(a , 1/\delta * \sqrt{2\pi})$$

- ان مسقط الذروة لمنحنى التوزيع الطبيعي هي قيمة المتوسط ، وبالتالي فان المتوسط يقسم المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي إلى قسمين متماثلين.
- ان ارتفاع الذروة يتعلق فقط بالانحراف المعياري لمنحنى التوزيع الطبيعي.

5-6-3-العلاقة بين منحنى التوزيع الطبيعي والاحتمالات:

تحدد العلاقة بين منحنى التوزيع الطبيعي والاحتمالات فيما يلي :

- ان المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحور الأفقي (x) يساوي الواحد كما هو متعارف عليه.
- ان أي قيمة من العينة تقع على يمين أو يسار المتوسط أي أكبر منه أو أصغر منه .
- ان احتمال أي قيمة من العينة تقع على يمين المتوسط هو مابين 0 و 0.5 و احتمال أي قيمة من العينة تقع على يسار المتوسط هو مابين 0 و 0.5 .
- ان احتمال أي قيمة من العينة محصورة ضمن مجال المتوسط زائد أو ناقص انحراف معياري واحد هو p = 0.68 .
- ان احتمال أي قيمة من العينة محصورة ضمن مجال المتوسط زائد أو ناقص انحرافين معياريين هو p = 0.95 .
- ان احتمال أي قيمة من العينة محصورة ضمن مجال المتوسط زائد أو ناقص ثلاث انحرافات معيارية هو p = 0.99 .

5-6-4- التوزيع الطبيعي المعياري : ان التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى معدل من التوزيع الطبيعي بحيث أصبحت ميزاته هبي التالية :

1. المتوسط الحساب مساو للصفر أي M(z) = 0
2. الانحراف المعياري σ (x) = 1

لقد قام المتخصصين بالإحصاء الرياضي باستنتاج منحنى التوزيع الطبيعي المعياري من خلال استبدال كل قيمة x بالقيمة التالية :

$$(x-a / \sigma)$$

استنتاج العلاقة الجديدة التي تمثل معادلة منحنى التوزيع الطبيعي المعياري وهي التالية :

$$z =(x-a / \sigma)$$

ومن ثم عمل هؤلاء المتخصصين أيضاً على وضع جدول لمنحنى الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري سمي جدول احتمالات z ؛ حيث أن قيمة z لا يمكن أن تتجاوز 5 .

في جداول z نجد أن لكل قيمة z ما يقابلها في قيمة التابع f(z) أو ϕ(z) .

مثـــــال (1) :لدى معاينة 100 سنبلة تبين أن القيمة الوسط هي 60 بانحراف معياري قدره 10 ،تم سحب سنبلة بشكل عشوائي ،ما هو احتمال أن يكون عدد حباتها هو 60 حبة؟

الحـــل : لدين هنا المعطيات الأولية : a= 50 و σ= 10 ، إذن نطبق القانون اللازم :

$$z = (x-a / \sigma)$$

$$z = (60-50)/10$$

$$z = 1$$

الآن نعود إلى جدول توزيع z ونستخرج أن :

$$\phi(z) = \phi(1) = 0.34$$

أي أن احتمال أن يكون عدد حباتها هو 60 حبة هو p= 0.34 .

5-6-5- العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي :عندما يكون عدد الأفراد في العينة n كبيرا جدا وعندما يكون كلا من قيمتي p ,q قريبتين من بعضهما البعض فان التوزيع الثنائي يتحول إلى التوزيع الطبيعي بالقيم التالية :

القيمة الوسط $a = n * p$

الانحراف المعياري $\delta = \sqrt{n * p * q}$

مثـــــال (2) : تم رش 1000 شجرة في أحد البساتين لمعالجة أحد الأمراض علما أن فعالية المبيد النظرية هي 98% .والمطلوب هو حساب ما يلي :

1. ما هو احتمال أن تكون ثلاث أشجار على الأقل مصابة؟
2. ما هو احتمال أن يوجد شجرتين مصابتين على الأكثر؟
3. ما هو ؟

الحـــــــل : لدينا مسبقا الافتراضات التالية:

$$P = 1- q$$

$$n = 1000$$

$$P(x = r) = (r^n) * P^r * q^{n-r}$$

$$(^n_r) = n\ !/(n-r!)*r!$$

$$a = n * p = 20$$

$$\delta = \sqrt{n * p * q} = 4.43$$

الآن نطبق العلاقات المذكورة مع مراعاة القيم المسبقة لكل متغير :

1. احتمال أن تكون ثلاث أشجار على الأقل مصابة:

$$P(x>=3) = 0.5 + p(3<x<20)$$

$$p(3<x<20) = \phi(20-20/4.43)- \phi(3-20/4.43)$$

$$p(3<x<20) = 0.4999$$

$$P(x>=3) = 0.5 +4.999 = 0.9999$$

2. احتمال أن يوجد شجرتين مصابتين على الأكثر:

$$P(x<=2) = 0.5 – p(2<x<20)$$

$$p(2<x<20) = \phi(20-20/4.43)- \phi(2-20/4.43)$$

$$p(2<x<20) = 0.49997$$

$$P(x<=2) = 0.5 - 0.49997 = 3*10^{-6}$$

3. احتمال أن يوجد اقل من 70 شجرة مصابة:

$$P(x<70) = 0.5 + p(20<x<70)$$

$$p(20<x<70) = \phi(70-20/4.43) - \phi(0)$$

$$p(20<x<70) = 0.5$$

$$P(x<70) = 0.5 + 0.5 = 1$$

5-6-6- العلاقة بين التوزيع الطبيعي والانحدار والارتباط : تتجلى العلاقة بين التوزيع الطبيعي والانحدار والارتباط في الحالة الخاصة التالية :عندما تكون العوامل المستقلة المدروسة مقاسة بواحدات قياس مختلفة فانه من الأفضل تحويل المقادير إلى التوزيع الطبيعي المعياري ؛وذلك يتم نقوم بالخطوات التالية :

- نطرح من كل قيمة من القيم المتوسط الحسابي للعينة.
- ناتج الطرح نقسمه على الانحراف المعياري للعينة

بعد إجراء الخطوتين السابقتين نكون قد حولنا المقادير إلى التوزيع الطبيعي المعياري وأصبحت تتميز بميزات التوزيع الطبيعي المعياري وهي التالية:

- المتوسط الحسابي للعينة يساوي الصفر
- الانحراف المعياري للعينة يساوي الواحد.

 من الجدير بالتنويه هنا إلى أنه عند تحويل المقادير إلى التوزيع الطبيعي المعياري فإن كلا من عاملي الانحدار والارتباط يصبحان متطابقين تماما.

*****